



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

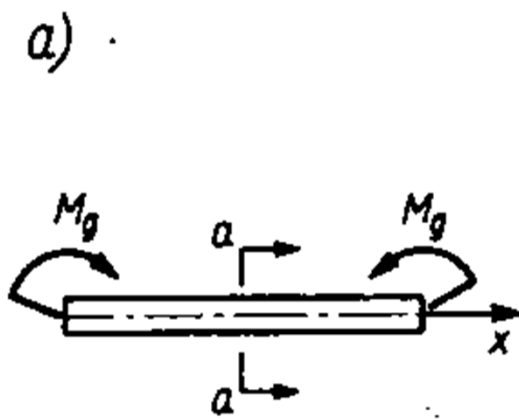


Wykład 13

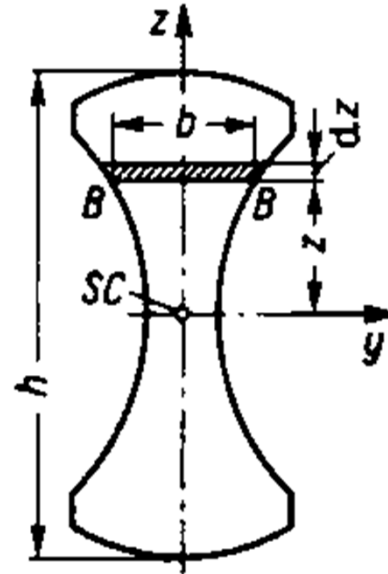
Zagadnienia sprężysto-plastyczne

Zginanie sprężysto-plastyczne belki
i nośność graniczna

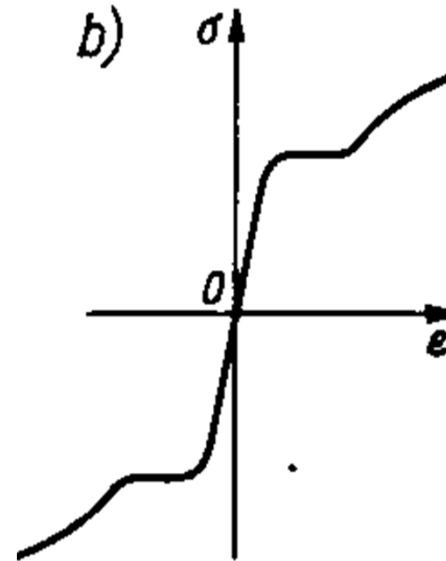
Czyste zginanie sprężysto-plastyczne belki



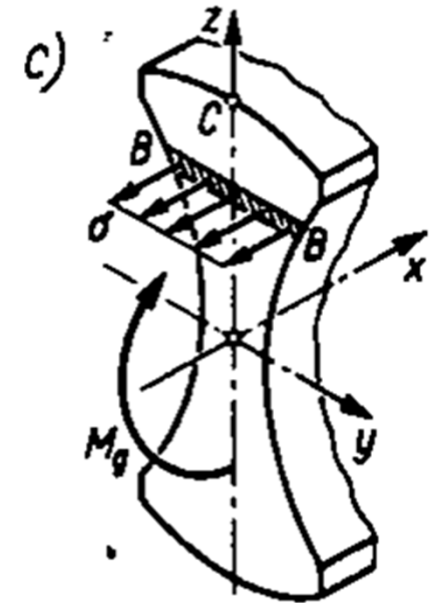
Belka obciążona czystym zginaniem



Przekrój poprzeczny



Wykres z próby rozciągania



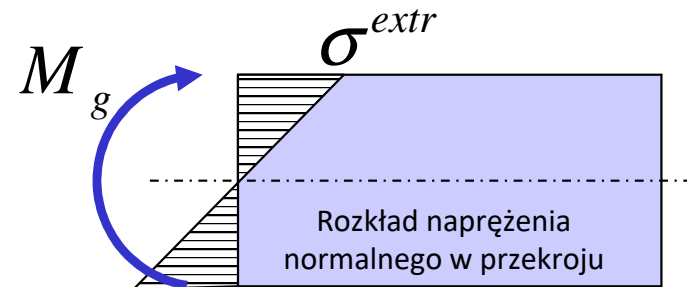
Naprężenia normalne w przekroju

W zakresie sprężystym rozkład naprężenia liczymy ze wzoru:

$$\sigma = -\frac{M_g \cdot z}{J_y}$$

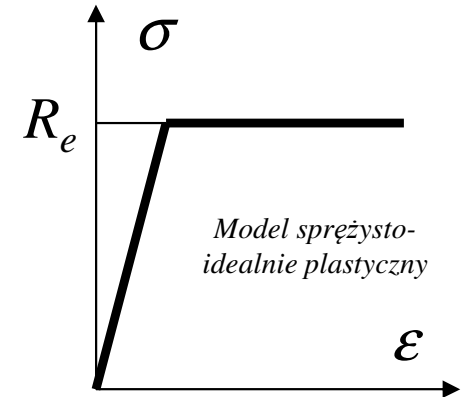
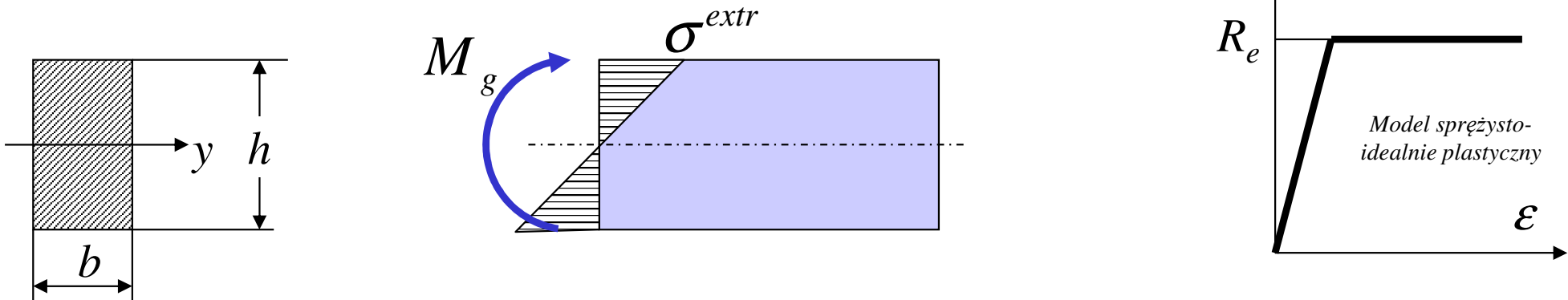


$$\sigma^{extr} = \frac{M_g \cdot \frac{h}{2}}{J_y}$$



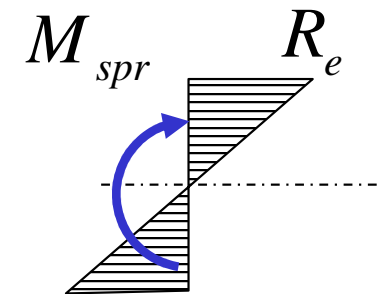
Czyste zginanie sprężysto-plastyczne belki

Rozważmy zginanie belki o przekroju prostokątnym wykonanej z materiału o charakterystyce sprężysto-plastycznej bez umocnienia:



W zakresie sprężystym kres wzrostu naprężenia odpowiada osiągnięciu przez skrajne włókna naprężenia o wartości równej granicy plastyczności R_e

Stąd możemy wyznaczyć maksymalny moment sprężysty dla przekroju prostokątnego:



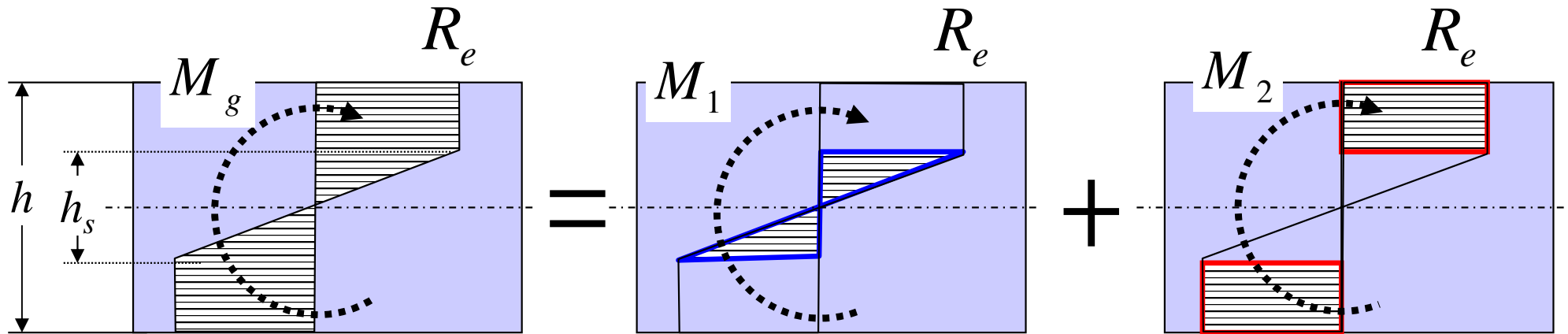
$$\sigma^{extr} = \frac{M_g \cdot \frac{h}{2}}{\frac{bh^3}{12}} = R_e$$



$$M_{spr} = \frac{R_e bh^2}{6}$$

Czyste zginanie sprężysto-plastyczne belki

Po przekroczeniu maksymalnego momentu sprężystego kolejne włókna będą osiągały stan uplastycznienia, a rozkład naprężenia w przekroju będzie miał charakter trapezowy:



Ten rozkład można przedstawić jako superpozycję dwóch stanów, z których każdy odpowiada części całkowitego momentu gnącego: $M_g = M_1 + M_2$

Możemy wyznaczyć wzór opisujący wartość tego momentu:

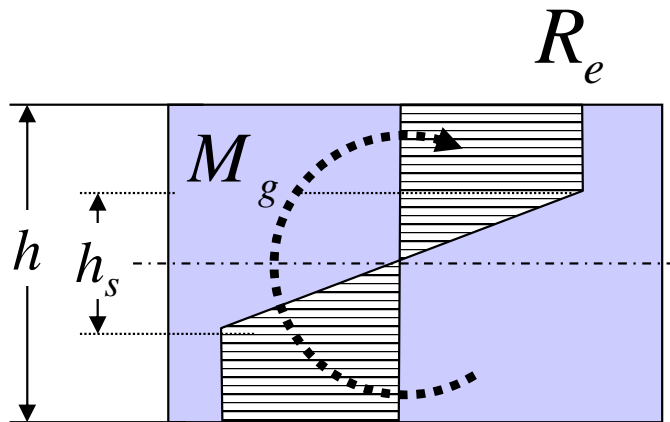
$$M_g = M_1 + M_2 = \frac{R_e h_s^2 b}{6} + b \cdot R_e \frac{(h-h_s)}{2} \cdot \frac{(h+h_s)}{2}$$

$$M_g = \frac{R_e b h^2}{6} \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{h_s}{h} \right)^2 \right]$$



$$M_g = M_{spr} \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{h_s}{h} \right)^2 \right]$$

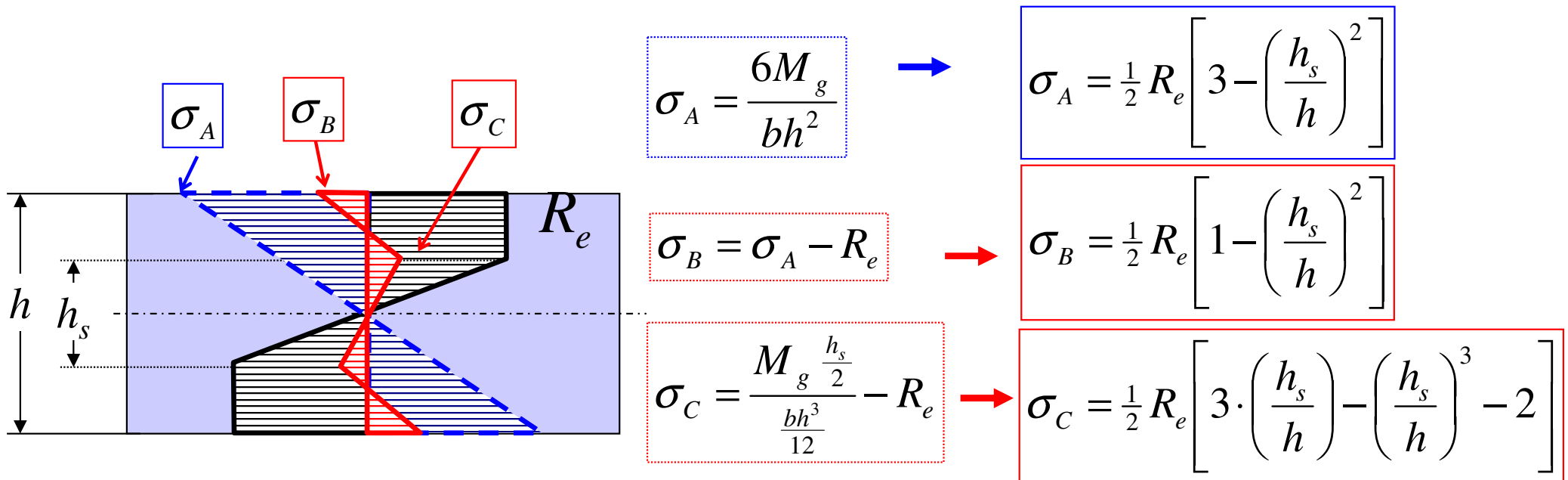
Czyste zginanie sprężysto-plastyczne belki



Moment gnący powodujący pracę sprężysto-plastyczną:

$$M_g = \frac{R_e b h^2}{6} \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{h_s}{h} \right)^2 \right]$$

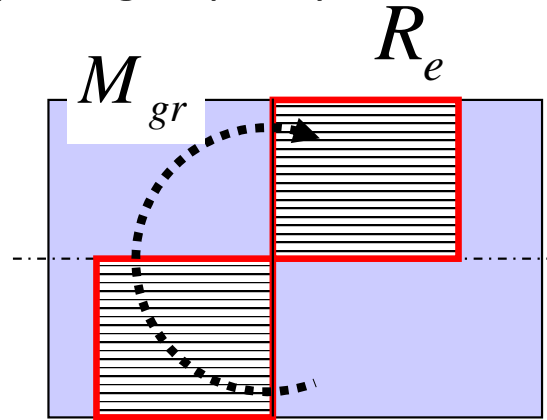
Jeśli teraz odciążymy belkę, **proces ten będzie miał charakter sprężysty**:



Po odciążeniu pozostaną **naprężenia resztkowe**

Czyste zginanie sprężysto-plastyczne belki

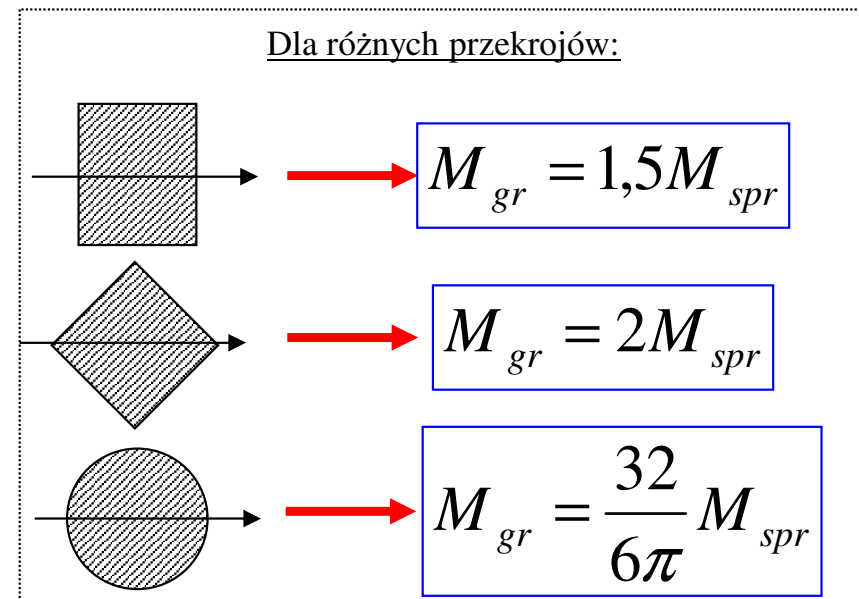
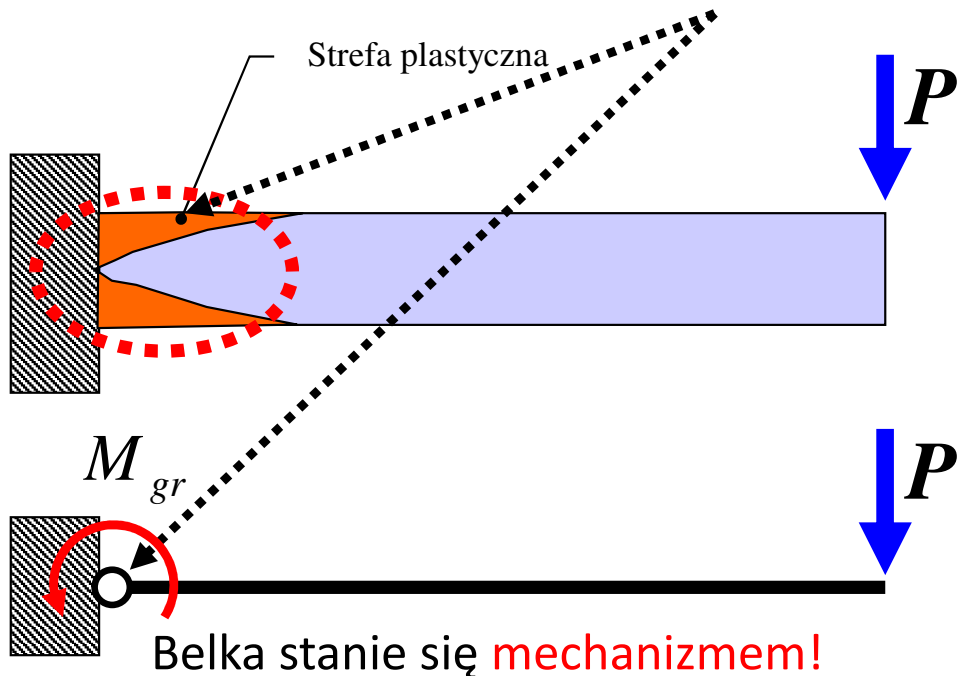
Dla pełnego uplastycznienia mamy **moment graniczny** (wyczerpanie nośności belki):



$$M_g = M_{spr} \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{h_s}{h} \right)^2 \right]$$

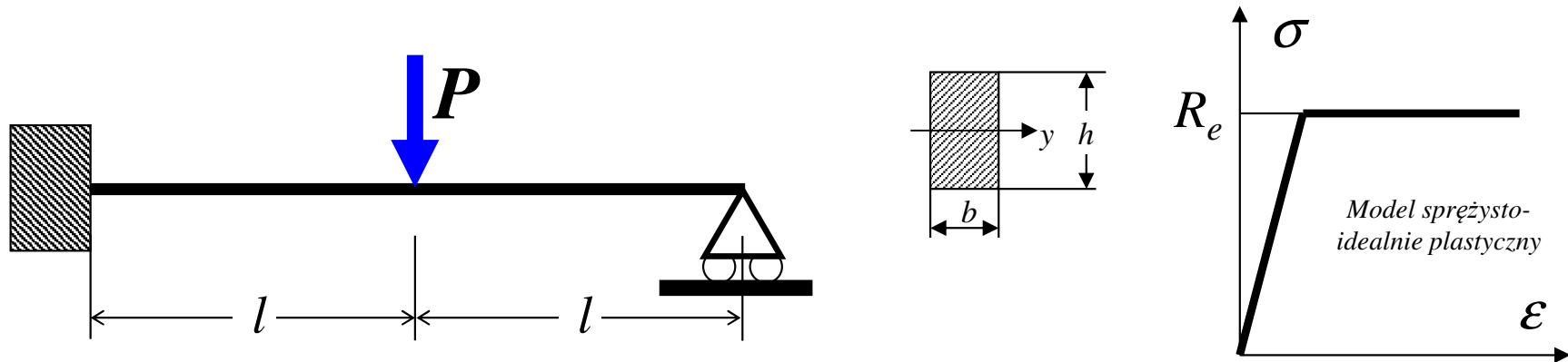
$$M_{gr} = M_g (h_s = 0) = 1,5M_{spr}$$

W belce wspornikowej, przy pełnym uplastycznieniu przekroju w strefie odkształceń plastycznych powstanie **przegub plastyczny!**

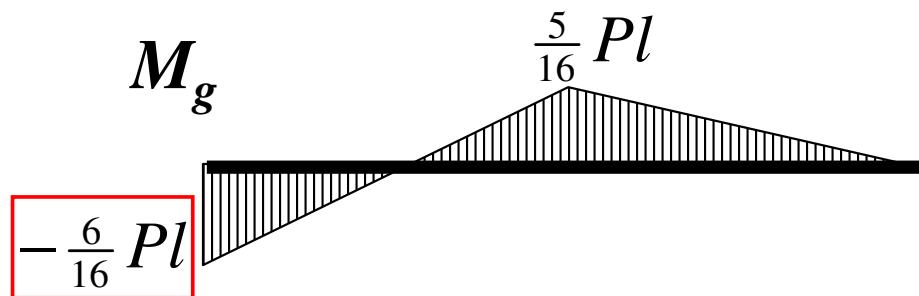


Nośność graniczna belki zginanej

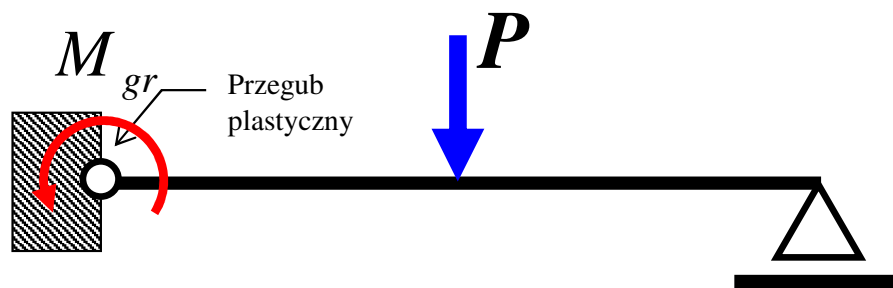
Rozważmy **statycznie niewyznaczalną belkę** o przekroju prostokątnym wykonaną z materiału o charakterystyce sprężysto-plastycznej bez umocnienia i podpartą jak na rysunku:



Stosując metodę M-M możemy wyznaczyć rozkład momentu gnącego w zakresie sprężystym:

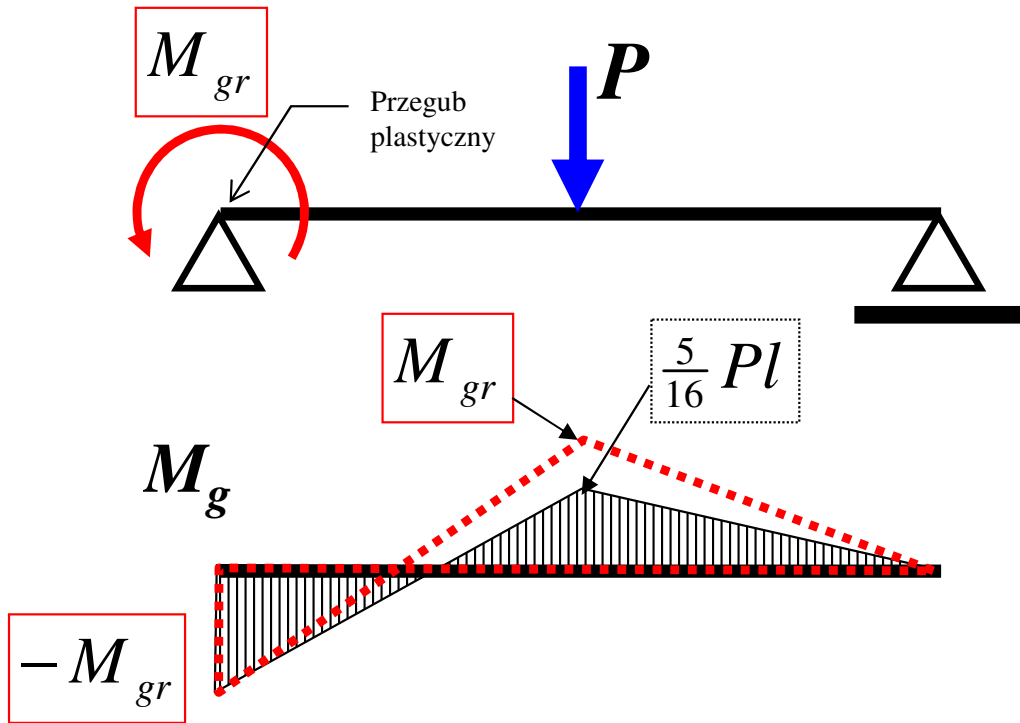


Moment gnący osiąga ekstremalną wartość w miejscu utwierdzenia belki.



Lewy koniec belki to przekrój, w którym najszybciej dojdzie do powstania pierwszych uplastycznień przy sile P_{spr} , a przy dalszym wzroście obciążenia może tu powstać przegub plastyczny.

Nośność graniczna belki zginanej

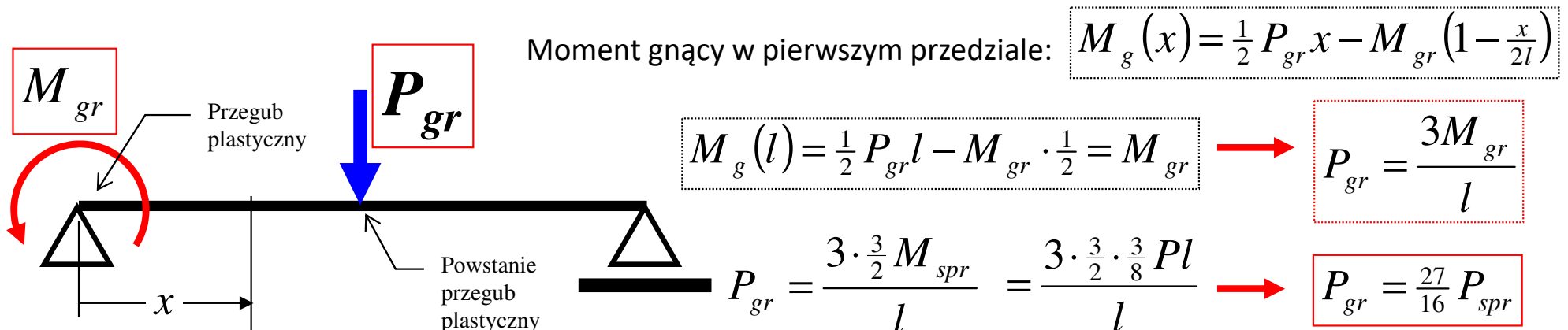


Powstał pierwszy przegub plastyczny (*pełne uplastycznienie przekroju*) zachowuje się tak, jakby belka była podparta przegubowo i obciążona dodatkowo momentem o wartości granicznej M_{gr} (wynikającym ze stanu naprężenia).

Nośność graniczna:

Graniczny przypadek od którego belka przestanie pracować i stanie się mechanizmem.

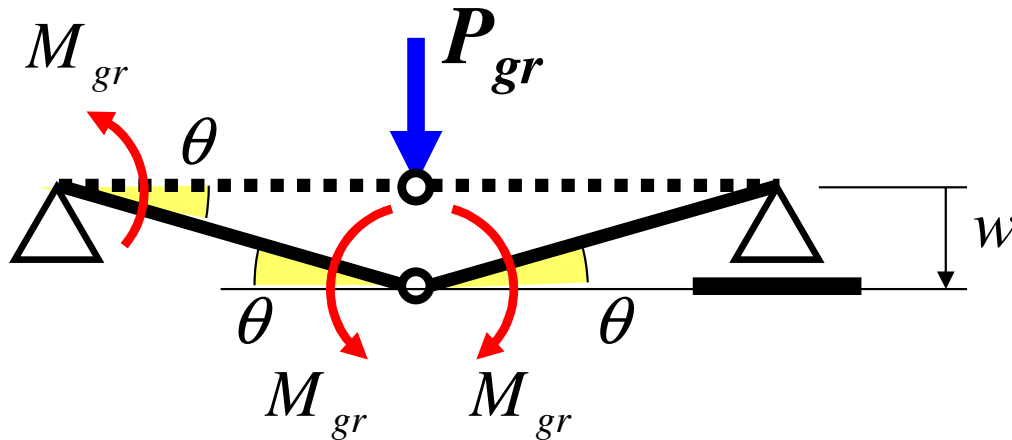
Chociaż na lewym końcu powstał przegub plastyczny, to jednak obciążenie może jeszcze wzrastać do momentu, gdy w innym przekroju wartość momentu osiągnie również wartość M_{gr} (powstanie drugi przegub plastyczny)



Utrata nośności zachodzi przy sile 1,688 razy większej niż ta, która spowodowała pierwsze uplastycznienie!

Nośność graniczna belki zginanej

Lepszy sposób (z zasady prac przygotowanych): Przewidujemy mechanizm zniszczenia.



Warunek równowagi:

Suma prac sił wewnętrznych i zewnętrznych na dowolnych przemieszczeniach przygotowanych jest równa zero.

$$P_{gr} \cdot w - M_{gr} \cdot \theta - M_{gr} \cdot \theta - M_{gr} \cdot \theta = 0$$

$$P_{gr} \cdot w = 3M_{gr} \cdot \theta$$



$$P_{gr} \cdot w \cong 3M_{gr} \cdot \frac{w}{l}$$



$$P_{gr} = \frac{3M_{gr}}{l}$$

$$P_{gr} = \frac{3 \cdot \frac{3}{2} M_{spr}}{l} = \frac{3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{8} Pl}{l}$$



$$P_{gr} = \frac{27}{16} P_{spr} \cong 1,688 \cdot P_{spr}$$

Utrata nośności zachodzi przy sile 1,688 razy większej niż ta, która spowodowała pierwsze uplastycznienie!